MATIÈRES À OPTION Mathématiques, Sciences physiques, Biologie

(Option générale) **Durée : 3 heures** **MATHÉMATIQUES**

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction numérique.

On se propose de lui associer une fonction numérique $\varphi(f) :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, notée plus simplement φf, par :

$$(\varphi f)(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t)\, dt .$$

On désigne par E l'ensemble des fonctions f pour lesquelles $(\varphi f)(x)$ a un sens pour tout $x > 0$, φ étant ainsi une application de E vers l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si f est n fois dérivable, $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f; on pose $f^{(0)} = f$.

Les parties 2 d'une part, 3 et 4 de l'autre, peuvent être considérées comme indépendantes. Il s'agit dans les deux cas d'étudier la restriction de φ à certains espaces de fonctions.

1

1.1. Vérifier que E est un espace vectoriel et φ une application linéaire.

1.2. Soit λ un nombre réel strictement positif. Pour $f \in E$, on définit f_λ par $f_\lambda(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$. Montrer que $f_\lambda \in E$ et que, pour tout $x > 0$, $(\varphi f)(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}(\varphi(f_\lambda))(x)$.

1.3. Montrer que E contient toutes les fonctions polynômes.

1.4. Montrer que, si pour tout $x > 0$, $\lim\limits_{t \to \infty} [e^{-xt} f(t)] = 0$, alors $f \in E$.

2

On dit que f est « en escalier à support borné » s'il existe une suite finie de nombres réels, dite « suite associée à f » : $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ telle que :

- pour $i = 1, 2, \ldots, n$, f est constante sur l'intervalle $[a_{i-1} ; a_i[$;
- pour $x \geqslant a_n$, $f(x) = 0$.

Soit H l'ensemble des fonctions en escalier à support borné. On admettra que H est un espace vectoriel pour les opérations usuelles sur les fonctions : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$; $(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$.

2.1. Vérifier que $H \subset E$.

2.2. Si $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ est la suite associée à f avec $f \in H$
et si : $\forall i, \{x \in [a_{i-1} ; a_i[\} \Rightarrow \{f(x) = b_i\}$
exprimer $(\varphi f)(x)$ à l'aide des a_i et des b_i.

2.3. Montrer que, dans l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions $\{1, e^{-a_1 x}, e^{-a_2 x}, \ldots, e^{-a_n x}\}$ sont linéairement indépendantes.

2.4. En déduire que la restriction de φ à H est injective.

Tournez la page S. V. P.

3

Soit E_0 l'ensemble des fonctions $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ telles que f est indéfiniment dérivable et telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0$,

$$\lim_{t \to \infty} [e^{-xt} f^{(n)}(t)] = 0.$$

Vérifier que E_0 est un espace vectoriel pour les opérations usuelles.

3.1. Montrer que $E_0 \subset E$.

3.2. Montrer que, si $f \in E_0$, alors $f' \in E_0$ et $\quad [\varphi(f')](x) = x.(\varphi f)(x) - f(0)$.

3.3. Montrer que, si $f \in E_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)} \in E_0$ et

$$[\varphi(f^{(n)})](x) = x^n.(\varphi f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} x^k f^{(n-1-k)}(0).$$

3.4. Soient $a \geqslant 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ quelconques, et $\quad f(t) = e^{-at} \cos \omega t$; $\quad g(t) = e^{-at} \sin \omega t$

a. Déterminer des primitives de : $t \to f(t)\, e^{-xt}$ et $t \to g(t)\, e^{-xt}$.

b. Vérifier que $(f, g) \in E_0^2$.

c. Calculer φf et φg.

On aura intérêt à utiliser la fonction complexe $(f(t) + ig(t))\, e^{-xt}$.

3.5. Soit $a \geqslant 0$. Pour $k = 0, 1, 2$, on pose : $f_k(t) = t^k e^{-at}$.

Vérifier que $f_k^{(n)}(t)$ est, pour tout k et tout n, $n \in \mathbb{N}$, de la forme $P_{n,k}(t)\, e^{-at}$ où $P_{n,k}$ est un polynôme, et en déduire que $f_k \in E_0$.

En intégrant par parties, calculer φf_0, φf_1, φf_2.

4

On admettra ici que la restriction de φ à E_0 est injective.

Soit $g \in E_0$, et soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

On suppose que l'équation différentielle :

$$(\xi) \qquad af''(t) + bf'(t) + cf(t) = g(t)$$

où $f \in C^2(\mathbb{R}^+)$ est l'inconnue, admet toutes ses solutions dans E_0, et que le trinôme $x \to ax^2 + bx + c$ n'admet aucun zéro réel positif ou nul.

4.1. Si f est solution de (ξ), exprimer φf en fonction de φg, de $f(0)$ et $f'(0)$.

4.2. Que devient l'expression trouvée au (4.1) lorsque (ξ) est l'équation :

$$(\xi_1) \qquad f''(t) + f'(t) + f(t) = 9\, t^2 e^{-2t} \text{ ?}$$

4.3. Effectuer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$\frac{18}{(2+x)^3 (x^2+x+1)}.$$

4.4. En utilisant les résultats de (3.4) et (3.5), et l'injectivité de φ, en déduire une expression de f, solution de l'équation (ξ_1), en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$.

---==oOOo==---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail